

异步广播网络的一比特趋同控制 *

安如^{1, 2} 王颖^{1, 3} 赵延龙^{1, 2} 张纪峰^{4, 1, 2}

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院数学科学全国重点实验室, 中国北京 100190;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 中国北京 100149;

3. 瑞典皇家理工学院决策与控制系统系, 瑞典斯德哥尔摩 11428;

4. 中原工学院自动化与电气工程学院, 中国河南郑州 450007)

摘要 针对通信资源受限与节点广播时刻不一致并存的网络环境, 本文研究了异步广播网络下能控线性多智能体系统的一比特趋同控制问题. 由于不同节点具有各自的广播时刻, 智能体获得的邻居一比特信息呈现随机间歇到达特征, 使得有限信息条件下的邻居状态恢复和趋同控制设计更加困难, 给闭环系统趋同性能带来了不利影响. 为解决这些问题, 本文采用随机节点激活变量刻画异步广播过程, 设计了一种基于递推投影估计的异步一比特趋同算法; 建立了趋同误差与估计误差之间的耦合递推关系, 刻画了异步网络中节点激活概率对算法步长系数选择条件及系统趋同性能的影响. 理论结果表明, 当通信拓扑为弱连通的平衡有向图时, 所提算法能够实现系统均方趋同, 并保证系统状态趋同速度可达到 $O(1/t)$. 数值仿真验证了理论分析结果及所提算法的有效性.

关键词 异步网络, 多智能体系统, 一比特通信, 递推投影估计, 趋同控制

MR(2020) 主题分类号 93A16(multi-agent system), 93B70(networked control), 93B30(system identification), 93D50(consensus)

DOI 10.12341/jssms 稿件编号

One-Bit Consensus Control under Asynchronous Broadcast Networks

AN Ru^{1, 2} WANG Ying^{1, 3} ZHAO Yanlong^{1, 2} ZHANG Ji-Feng^{4, 1, 2}

(1. State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, P. R. China 100190;

2. School of Mathematics Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing, P. R. China 100149;

3. Department of Decision and Control Systems, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden 11428;

* 献给陈翰馥先生九十华诞.

* 国家自然科学基金 (62433020, 62588101, 62303452, T2293770, 62473040), 中国博士后科学基金 (2022M720159) 资助课题.

收稿日期: 2026-xx-xx, 收到修改稿日期: 2026-xx-xx.

通信作者: 王颖, Email: wangying96@amss.ac.cn .

编委: XXX.

4. School of Automation and Electrical Engineering, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou, Henan Province, P. R. China 450007)

Abstract This paper investigates the one-bit consensus control problem for controllable linear multi-agent systems over asynchronous broadcasting networks, where limited communication resources coexist with inconsistent broadcasting times among agents. Since different agents have their own broadcasting times, the one-bit information received from neighbors arrives randomly and intermittently, making neighbor-state recovery and consensus control design under limited information more challenging and adversely affecting the consensus performance of the closed-loop system. To address these issues, random node activation variables are introduced to characterize the asynchronous broadcasting process, and an asynchronous one-bit consensus algorithm based on recursive projection estimation is developed. By establishing coupled recursive relations between the consensus error and the estimation error, the effects of node activation probabilities in asynchronous networks on the conditions for algorithm step coefficients and system consensus performance are characterized. Theoretical results show that, when the communication topology is a weakly connected balanced digraph, the proposed algorithm achieves mean-square consensus and guarantees an $O(1/t)$ convergence rate of the system states. Numerical simulations verify the theoretical results and the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords asynchronous network, multi-agent systems, one-bit communication, recursive projection estimation, consensus control

1 引言

多智能体系统的趋同控制是分布式协同控制中的基本问题之一,在无人机集群、传感器网络、机器人协作以及智能电网等领域具有广泛应用 [1–5]. 在实际网络环境中,智能体之间的信息交互通常同时受到通信资源受限和通信时刻不一致的影响:一方面,通信带宽、能量消耗和计算资源等约束使节点难以持续传输连续值状态信息 [6];另一方面,随机广播、网络时延和异步更新等因素又使不同节点难以在同一时刻完成信息交互 [7]. 因此,如何在复杂网络环境和有限通信资源约束下实现多智能体系统趋同,已成为分布式协同控制领域的重要研究问题.

在有限通信资源约束下,量化通信成为降低网络传输负担、实现分布式趋同控制的重要方法. 已有研究围绕对数量化 [8]、整数量化 [9] 以及有限比特量化 [10–12] 等通信策略,提出了多种量化趋同控制方法. 例如,李韬等 [10] 研究了均匀量化条件下的有限比特趋同问题,孟扬等 [11] 进一步考虑了高阶多智能体系统的有限比特通信与趋同控制. 与连续值通信相比,量化通信能够显著减少网络传输数据量,但也使智能体难以直接获得邻居的精确状态信息. 其中,一比特通信由于每次仅传输一个二值信息,具有极低的通信开销,适用于带宽和能量资源受限的网络环境 [13–16]. 然而,一比特信息所包含的状态信息十分有限,智能体无法仅凭单次通信准确恢复邻居状态. 因此,如何从连续到达的一比特观测中递推提取邻居状态信息,是一比特趋同控制中的关键问题.

随机逼近方法能够通过递推累积随机观测信息中所蕴含的统计特征,实现未知量的在线估计,为有限信息条件下的状态估计问题提供了重要方法基础. 陈翰馥院士长期致力于随机逼近理论及其应用研究,建立和发展了随机环境下递推估计与自适应算法的重要理论,推动了随机逼近

方法在系统辨识和自适应控制等领域的发展 [17, 18]. 受这一思想启发, 多智能体系统一比特趋同控制研究逐渐形成了“估计-控制”的设计思路, 即利用一比特通信信息估计邻居状态或其压缩信息, 并基于估计值构造趋同控制器. 例如, 赵延龙等 [13] 采用经验测度方法构建邻居状态估计器, 实现了二值通信条件下的趋同控制; 王婷等 [14] 进一步提出基于随机逼近型递推投影估计的趋同算法, 在改善邻居状态恢复性能的同时提升了系统趋同性能. 随后, 上述递推投影估计方法被进一步推广至高阶多智能体系统及切换拓扑情形 [15, 16]. 进一步地, 基于递推投影估计的一比特趋同方法被推广至能控线性多智能体系统 [19], 并建立了相应的均方趋同结果. 然而, 上述方法均基于同步信息获取机制, 即假设各智能体能够在统一的离散时刻产生、发送并利用邻居信息. 当节点广播时刻不一致时, 邻居一比特信息将呈现间歇到达特征, 现有同步“估计-控制”框架及其理论分析难以直接适用.

相比同步广播网络, 异步广播网络中不同节点具有各自的广播时刻, 智能体在同一时刻能够获得的邻居信息并不一致. 近年来, 异步通信机制已在多智能体系统和分布式优化中受到关注, 相关研究涉及异步采样 [20, 21]、异步事件触发 [22]、随机局部交互 [23] 以及异步分布式优化 [24, 25] 等问题, 分析了节点信息交互时刻不一致对协同过程的影响. 然而, 上述异步趋同研究 [20–22] 大多基于连续值或高精度信息交互, 对一比特通信条件下邻居状态估计与趋同控制耦合问题的讨论仍较为有限. 对于基于状态估计的一比特趋同控制而言, 节点广播时刻的不一致性会使邻居一比特观测信息呈现随机间歇到达特征, 从而影响状态估计的更新过程; 同时, 趋同控制器依赖于邻居状态估计结果, 估计误差的变化又会进一步影响闭环系统的趋同过程. 因此, 在异步广播机制下, 一比特信息约束、随机信息到达和估计-控制耦合效应相互交织, 使得现有同步通信条件下的一比特趋同方法难以直接应用. 如何设计适用于异步广播网络的一比特趋同算法, 并刻画节点激活概率对系统趋同性能的影响, 是本文需要解决的主要问题.

为解决上述问题, 本文研究异步广播网络下能控线性多智能体系统的一比特趋同控制问题. 通过引入随机节点激活变量刻画节点广播时刻的不一致性, 设计基于递推投影估计的异步一比特趋同算法, 并分析节点激活概率对系统趋同性能的影响. 主要贡献如下.

- 设计了一种基于递推投影估计的异步一比特趋同算法. 针对异步广播导致邻居一比特信息随机间歇到达的问题, 将节点激活变量融入估计过程, 使智能体仅在邻居节点被激活并广播一比特信息时, 利用递推投影估计算法更新对应的邻居状态估计, 以从有限的一比特通信中在线提取邻居状态信息; 当邻居节点未被激活时, 估计器保持上一时刻的估计值, 控制器则基于当前缓存估计值构造趋同项, 从而形成适用于异步广播机制的估计-控制框架. 与已有同步网络的一比特趋同算法相比 [19], 所提算法进一步处理了节点广播时刻不一致导致的一比特信息随机间歇到达问题, 实现了异步广播网络的邻居状态估计与趋同控制.
- 建立了异步广播条件下趋同误差与估计误差之间的耦合递推关系, 刻画了节点激活概率对算法步长系数选择条件及系统趋同性能的影响. 理论结果表明, 在弱连通的平衡有向通信拓扑下, 所提算法能够保证系统实现均方趋同, 且系统状态趋同误差以 $O(1/t)$ 的速度收敛. 进一步地, 最小节点激活概率直接影响估计误差的衰减强度和估计步长系数的取值条件: 当最小节点激活概率较小时, 节点有效广播频率降低, 保证均方趋同及 $O(1/t)$ 趋同速度所需的估计步长系数相应增大; 当最小节点激活概率增大时, 估计器获得新一比特观测并进行有效更新的机会增加, 从而较小的估计步长系数即可实现所需收敛速度.

本文其余部分安排如下: 第 2 节介绍相关预备知识, 并给出异步广播网络下一比特趋同问题

的数学描述; 第 3 节设计基于递推投影估计的异步一比特趋同算法; 第 4 节建立所提出算法的均方趋同及收敛速度的主要理论结果; 第 5 节通过数值仿真验证理论分析结果及所提算法的有效性; 第 6 节总结全文, 并讨论后续研究方向.

2 预备知识及问题描述

2.1 基本符号

分别记 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{N}$ 、 $\mathbb{N}_+$ 、 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n \times m}$ 为实数集、自然数集、正整数集、 n 维实向量空间和 $n \times m$ 维实矩阵空间. 记 $(\cdot)^T$ 为矩阵或向量的转置. 记 $\mathbf{0}_m = [0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$, 以及 $\mathbf{1}_m = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^m$, 分别为 m 维零向量和 m 维全 1 向量. 记 $e_i = \underbrace{[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T}_{i-1 \text{ 个}} \in \mathbb{R}^N$ 为第 i 个标准基向量.

对于标量 $a \in \mathbb{R}$, 记 $|a|$ 为其绝对值. 对于向量 x 或矩阵 A , 分别记 $\|x\| = \|x\|_2$, $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ 为欧氏范数和诱导 2 范数. 对于实对称方阵 A , 记 $\lambda_{\max}(A)$ 和 $\lambda_{\min}(A)$ 分别表示矩阵 A 的最大特征值和最小特征值. 对于对称矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 若矩阵 $A - B$ 为半正定矩阵, 则记 $A \succeq B$. 记 $\text{diag}\{\cdot\}$ 为对角矩阵构造算子. 对于矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, 定义 Kronecker 积

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

记 $E[\cdot]$ 为数学期望算子. 对于序列 $\{x(k)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$, 定义一步前移算子 $\mathbb{D}$ 为 $\mathbb{D}x(k) = x(k+1)$, 并递归定义 $\mathbb{D}^l x(k) = x(k+l)$.

2.2 图理论

为描述智能体之间的信息交互关系, 引入有向通信图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$ 表示智能体集合, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示有向边集合. 若 $(j, i) \in \mathcal{E}$, 则表示智能体 i 能够接收来自智能体 j 的广播信息. 记 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 为智能体 i 的入邻居集. 定义图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵为 $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 其中, 当 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 时, $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$. 记 $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 为智能体 i 的入度, 并定义入度矩阵 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$. 进一步记 $d = \sum_{i=1}^N d_i = |\mathcal{E}|$, 表示有向边的总数, 也即所有有序邻居对 (i, j) 的总数. 图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵定义为 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$.

若有向图 $\mathcal{G}$ 忽略所有边的方向后所得无向图连通, 则称图 $\mathcal{G}$ 弱连通; 若有向图 $\mathcal{G}$ 任意节点的入度与出度相等, 则称图 $\mathcal{G}$ 平衡. 若有向图 $\mathcal{G}$ 弱连通且平衡, 则 $\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^T)$ 为对称半正定矩阵, 且零特征值为单重特征值. 因此, $\mathcal{L}_s$ 的特征值可排列为 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$. 由于 $\mathcal{L}_s$ 为实对称矩阵, 存在正交矩阵 $T_{\mathcal{G}}$, 使得 $T_{\mathcal{G}}^{-1} \mathcal{L}_s T_{\mathcal{G}} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, 其中 $T_{\mathcal{G}}^{-1} = T_{\mathcal{G}}^T$, 且 $T_{\mathcal{G}}$ 的列向量由 $\mathcal{L}_s$ 的单位正交特征向量构成.

2.3 问题描述

考虑如下由 N 个智能体组成的多智能体系统:

$$x_i(t+1) = Ax_i(t) + Bu_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^n$ 为常值系数矩阵, $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 为智能体 i 在时刻 t 的状态, $u_i(t) \in \mathbb{R}$ 为智能体 i 在时刻 t 的控制输入.

在同步网络中, 所有智能体的信息广播时刻保持一致; 而在异步网络中, 不同智能体具有各自的广播时刻. 为描述这种异步性, 记 $\mu_j(t)$ 为智能体 j 在时刻 t 的节点激活变量. 当 $\mu_j(t) = 1$ 时, 智能体 j 被激活并向邻居广播信息; 当 $\mu_j(t) = 0$ 时, 智能体 j 未被激活且不进行广播.

具体地, 智能体 j 首先对自身状态进行一比特编码, 再根据节点激活状态决定是否广播编码信息. 其一比特编码信息 $s_j(t)$ 和有效广播信息 $\tilde{s}_j(t)$ 分别定义为

$$\begin{cases} s_j(t) = 1_{\{g(x_j(t)) + d_j(t) \leq c_j\}}, \\ \tilde{s}_j(t) = \mu_j(t)s_j(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中, $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为待设计的压缩编码函数, $d_j(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 为用于生成一比特通信数据的高斯随机抖动信号, $c_j \in \mathbb{R}$ 为编码阈值, $1_{\{\cdot\}}$ 为指示函数, 当括号内条件成立时取值为 1, 否则取值为 0.

注 2.1 随机节点激活机制用于刻画异步广播网络中节点广播时刻不一致的现象. 在实际网络中, 受节点计算能力、通信调度、网络时延以及能源管理策略等因素影响, 不同节点可能在不同时间被激活并向其邻居广播信息. 本文用节点激活变量 $\mu_j(t)$ 描述智能体 j 在时刻 t 是否产生并广播一比特信息: 当 $\mu_j(t) = 1$ 时, 节点 j 广播当前一比特信息; 当 $\mu_j(t) = 0$ 时, 节点 j 不产生新的广播信息. 因此, 该模型重点刻画的是广播端信息产生时刻的异步性, 而不是链路丢失或控制拓扑切换.

需要指出的是, 随机节点激活机制也可看作更一般随机异步交互模型的一种特殊形式. 例如, 若将激活对象由节点扩展为边或节点对, 则可描述随机局部交互或 Gossip 型通信机制 [23, 25, 26]; 若进一步考虑接收端、状态更新端或控制端具有不同的激活时刻, 则可得到更一般的异步信息处理模型. 本文主要关注节点广播时刻不一致对一比特状态估计和趋同控制耦合分析的影响, 因此采用节点级随机激活模型, 并将更一般的异步机制作为后续研究方向.

为进行后续分析, 对系统模型、网络拓扑图以及异步通信机制作如下假设.

假设 2.1 线性系统 (A, B) 能控.

假设 2.2 拓扑图 $\mathcal{G}$ 为平衡有向图, 且弱连通.

假设 2.3 对任意 $i = 1, 2, \dots, N$, 节点激活变量 $\{\mu_i(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$ 为伯努利过程, 且

$$\mathbb{P}\{\mu_i(t) = 1\} = p_i, \quad \mathbb{P}\{\mu_i(t) = 0\} = 1 - p_i,$$

其中 $0 < p_i \leq 1$. 此外, $\mu_j(t)$ 与高斯随机抖动 $d_j(t)$ 相互独立.

目标: 本文的目标是基于异步一比特通信信息 $\tilde{s}_j(t)$, 设计估计器和控制器 $u_i(t)$, 使多智能体系统实现均方趋同, 即

$$\mathbb{E}[\|x_i(t)\|^2] < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|x_i(t) - \bar{x}(t)\|^2] = 0,$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$, $\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$.

3 算法设计

本节针对异步广播机制下节点广播时刻不一致的问题, 设计了一种仅依赖一比特通信的趋同算法, 使多智能体系统在异步广播网络下实现均方趋同.

由于任意能控线性系统均可通过 Brunovsky 变换转化为 Brunovsky 标准型 [27], 因此, 为简化算法设计, 本文考虑 Brunovsky 标准型下的多智能体系统 (1)-(2), 其中

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

基于上述异步广播模型和 Brunovsky 标准型表示, 下面设计适用于异步一比特信息交互的趋同算法. 与同步广播情形不同, 异步广播机制下不同节点的广播时刻并不一致, 智能体在每个时刻能够获得的邻居一比特信息随节点激活状态随机变化. 因此, 同步一比特趋同算法 [19] 中“每个时刻均可利用邻居新观测更新估计值”的机制不再适用. 随机逼近算法 [17, 18] 能够通过递推利用随机观测信息中蕴含的统计特征, 实现未知量的在线估计, 这为本文在一比特信息条件下设计邻居状态估计器提供了方法启发. 基于这一思想, 本文保留一比特趋同中的“估计—控制”基本思路, 并将节点激活变量引入随机逼近型递推投影估计过程, 以适应异步广播机制下邻居一比特观测随机间歇到达的特点: 当邻居节点被激活并广播一比特信息时, 智能体利用该信息更新对应的邻居压缩状态估计; 当邻居节点未被激活时, 相应估计值保持不变. 在此基础上, 控制器利用当前可用的缓存估计值构造趋同项, 从而形成适用于异步广播网络的一比特趋同算法. 具体设计如下.

算法 3.1 异步一比特趋同算法

初始条件: 记整数 $t_0(>0)$ 为初始时刻. 令 $x_i(t_0+1) = x_i^0$ 为智能体 i 的初始状态, $\hat{z}_{ji}(t_0) = \hat{z}_{ji}^0$ 为智能体 i 对其邻居智能体 j 的初始估计. 当 $t \geq t_0 + 1$ 时, 算法如下.

步骤 1: 通信协议: 设计压缩函数

$$g(x_j(t)) = K_2 x_j(t),$$

其中 $K_2 = [b_1, \dots, b_{n-1}, 1] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 为压缩系数, 且 $b_1, \dots, b_{n-1}$ 满足最小相位条件: 多项式 $z^{n-1} + b_{n-1}z^{n-2} + \dots + b_2z + b_1 = 0$ 的所有根 $r_1, \dots, r_{n-1}$ 均位于单位圆内.

步骤 2: 趋同控制器:

步骤 2.1 估计器: 每个智能体 i 通过如下估计器估计其邻居智能体 j 的压缩状态 $K_2 x_j(t)$:

$$\hat{z}_{ji}(t) = \Pi_M \left\{ \hat{z}_{ji}(t-1) + \frac{\beta}{t} \mu_j(t) \left(F_{c_j}(\hat{z}_{ji}(t-1)) - \tilde{s}_j(t) \right) \right\}, \quad (4)$$

其中 $j \in \mathcal{N}_i$, $\beta > 0$ 为估计器的步长系数, $F_{c_j}(z) = F(c_j - z)$, $\Pi_M(\zeta) = \arg \min_{|\xi| \leq M} |\zeta - \xi|$ 为投影算子, M 为 $|K_2 x_i^0|$ 和 $|\hat{z}_{ji}^0|$ 的上界.

步骤 2.2 控制器: 基于上述估计值, 每个智能体 i 设计控制输入为

$$u_i(t) = K_1 x_i(t) + \frac{\gamma}{t+1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\hat{z}_{ji}(t) - K_2 x_i(t)), \quad (5)$$

其中 $K_1 = [-a_1 + b_1, -a_2 + b_2 - b_1, \dots, -a_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2}, -a_n - b_{n-1} + 1] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 为稳定项 $K_1 x_i(t)$ 的控制增益, $\gamma > 0$ 为趋同项 $\frac{\gamma}{t+1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\hat{z}_{ji}(t) - K_2 x_i(t))$ 的步长系数.

注 3.1 算法 3.1 中的节点激活变量主要作用于邻居压缩状态的估计过程. 估计过程所采用的递推投影估计本质上是一类随机逼近算法. 在仅能获得一比特信息的条件下, 该估计器通过建立一比特通信数据与待估计压缩状态之间的统计映射关系, 利用随机逼近方法递推修正估计值, 实现对邻居压缩状态 $K_2 x_j(t)$ 的在线估计. 具体到本文的异步广播机制, 当邻居节点 j 在时刻 t 被激活时, 智能体 i 利用其广播的一比特信息更新对应估计值 $\hat{z}_{ij}(t)$; 当节点 j 未被激活时, 智能体 i 无法获得新的关于节点 j 的一比特观测, 因此对应估计值保持不变. 由此, 异步广播机制体现为估计器有效更新时刻的随机性.

需要指出的是, 控制器并未仅使用当前时刻被激活邻居新到达的一比特信息, 而是基于当前已获得的缓存估计值构造趋同项. 这样设计的原因在于: 即使某一邻居节点当前未被激活, 智能体仍可利用此前得到的估计值参与控制, 从而避免控制输入随节点激活状态发生剧烈随机切换. 换言之, 本文中的异步性主要体现在一比特观测和估计更新过程, 而控制器则通过缓存估计值将随机间歇到达的信息转化为可连续使用的控制信息.

当所有节点在每个时刻均被激活, 即 $\mu_j(t) = 1, j \in \mathcal{V}$ 时, 算法 3.1 退化为同步广播情形下的一比特趋同算法 [19]. 因此, 本文算法可看作同步一比特趋同算法在异步广播网络下的推广.

4 主要结果

本章分析所提出异步一比特趋同算法的趋同性能. 首先, 4.1节建立压缩状态趋同误差与估计误差的耦合递推关系, 分析异步节点激活机制对二者收敛性能的影响, 并给出相应的收敛条件与收敛速度. 在此基础上, 4.2节利用压缩状态与原系统状态之间的趋同等价关系, 进一步证明原系统状态的趋同性, 并给出相应的趋同速度.

4.1 压缩状态趋同与估计误差分析

为便于后续分析, 首先给出算法的向量形式. 定义 $x(t) = [x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{nN}$, $\mu(t) = [\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N$, $s(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{s}(t) = [\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t), \dots, \tilde{s}_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N$, 以及 $C = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^N$. 记 $\hat{z}(t) = [\dots, \hat{z}_{ji}(t), \dots]^T \in \mathbb{R}^d$ 为所有估计值按照估计节点 i 及其入邻居节点 j 的顺序排列得到的向量, 即首先按照索引 i 排序, 当 i 相同时, 再按照索引 j 排序, 其中 $j \in \mathcal{N}_i$.

进一步构造矩阵 Q 和 W 以刻画智能体压缩状态与估计值之间的关系.

矩阵 Q 用于选取每个估计值所对应的真实压缩状态. 定义 $Q = [\dots, Q_{ji}^T, \dots]^T \in \mathbb{R}^{d \times N}$, 其中各行按照索引 i 优先、索引 j 次优先的顺序排列, $j \in \mathcal{N}_i$, $Q_{ji} = e_j \in \mathbb{R}^N$.

矩阵 W 用于选取每个估计项的估计主体. 定义 $W = [\dots, W_{ji}, \dots] \in \mathbb{R}^{N \times d}$, 其中各列按照索引 i 优先、索引 j 次优先的顺序排列, $j \in \mathcal{N}_i$, $W_{ji} = e_i \in \mathbb{R}^N$.

由于估计器 $\hat{z}_{ji}(t)$ 的更新由被估计节点 j 的激活变量 $\mu_j(t)$ 决定, 定义 $\Delta(t) = \text{diag}\{Q\mu(t)\}$.

基于上述矩阵定义, 估计器的向量形式可写为

$$\hat{z}(t) = \Pi_M \left\{ \hat{z}(t-1) + \frac{\beta}{t} \Delta(t) \left(\mathcal{F}_{\bar{C}}(\hat{z}(t-1)) - Q\tilde{s}(t) \right) \right\},$$

其中 $\Pi_M(z) = [\Pi_M(z_1), \dots, \Pi_M(z_d)]^T$, $\mathcal{F}_{\bar{C}}(z) = [F_{\bar{c}_1}(z_1), \dots, F_{\bar{c}_d}(z_d)]^T$, $z = [z_1, z_2, \dots, z_d]^T \in \mathbb{R}^d$, $\bar{c}_i$ 是阈值向量 $\bar{C} = QC$ 的第 i 个分量.

类似地, 系统状态的更新形式为

$$x(t) = \left(I_N \otimes (A + BK_1) - \frac{\gamma}{t} \mathcal{L} \otimes BK_2 \right) x(t-1) + \frac{\gamma}{t} (W \otimes B) \varepsilon(t-1),$$

其中 $\varepsilon(t) = \hat{z}(t) - (Q \otimes K_2)x(t)$ 为压缩状态的估计误差.

为分析压缩状态趋同误差与状态估计误差的收敛性质, 引入如下两个李雅普诺夫函数:

$$V(t) = E \left[\|(T_G^{-1} \otimes K_2) \delta(t)\|^2 \right], \quad R(t) = E [\|\varepsilon(t)\|^2],$$

其中 $\delta(t) = (J_N \otimes I_n)x(t)$, $J_N = I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$, T_G 为由矩阵 $\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^T)$ 的单位正交特征向量构成的正交矩阵.

在所提出的一比特趋同算法中, 趋同控制器依赖于邻居压缩状态的估计值, 因而压缩状态趋同误差的演化受到状态估计误差的影响; 同时, 待估计的邻居压缩状态随系统状态动态变化, 使状态估计误差的演化又与压缩状态趋同误差相关. 因此, 二者的收敛性质需要联合分析. 下面建立 $V(t)$ 与 $R(t)$ 的耦合递推关系, 为进一步分析异步广播机制下的系统状态趋同与估计误差收敛奠定基础.

引理 4.1 若假设 2.1-2.3 成立, 则对于算法 3.1, 函数 $V(t)$ 和 $R(t)$ 具有如下耦合递推估计关系:

$$V(t) \leq \left(1 - \frac{\gamma \lambda_2}{t} \right) V(t-1) + \frac{\gamma \lambda_G}{\lambda_2 t} R(t-1) + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

和

$$R(t) \leq \left(1 - \frac{2\beta p_{\min} f_M - \gamma \alpha}{t} \right) R(t-1) + \frac{\gamma \lambda_G}{\lambda_2 t} V(t-1) + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

其中 λ_2 是矩阵 $\mathcal{L}_s$ 的最小非零特征值, $\lambda_G = \|T_G^{-1} J_N W\|^2$, $\lambda_{QW} = \|QW\|^2$, $\lambda_{Q\mathcal{L}} = \|Q\mathcal{L}T_G\|^2$, $\alpha = \sqrt{2\lambda_{QW}} + \frac{\lambda_{Q\mathcal{L}}\lambda_2}{\lambda_G}$, $p_{\min} = \min_{j \in \mathcal{V}} p_j$, $f_M = \min_{j \in \mathcal{V}} \{f(|c_j| + M)\}$.

证 记 $\hat{\delta}(t) = (T_G^{-1} \otimes K_2)\delta(t)$, 则由系统状态更新式以及 $\delta(t) = (J_N \otimes I_n)x(t)$ 可得

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\delta}(t-1) - \frac{\gamma}{t} (T_G^{-1} J_N \mathcal{L} \otimes K_2) x(t-1) + \frac{\gamma}{t} T_G^{-1} J_N W \varepsilon(t-1).$$

因此,

$$V(t) = V(t-1) + V_1(t) + V_2(t) + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

其中 $V_1(t) = -\frac{\gamma}{t} (E[\hat{\delta}^T(t-1)(T_G^{-1} J_N \mathcal{L} \otimes K_2)x(t-1)] + E[x^T(t-1)(\mathcal{L}^T J_N T_G \otimes K_2^T)\hat{\delta}(t-1)])$

且 $V_2(t) = \frac{2\gamma}{t} E[\hat{\delta}^T(t-1)T_G^{-1} J_N W \varepsilon(t-1)]$.

由图 $\mathcal{G}$ 的平衡性可知 $J_N \mathcal{L} = \mathcal{L} J_N = \mathcal{L}$. 因此,

$$\begin{aligned} V_1(t) &= -\frac{\gamma}{t} (E[\hat{\delta}^T(t-1)(T_G^{-1} J_N \mathcal{L} \otimes K_2)x(t-1)] \\ &\quad + E[x^T(t-1)(\mathcal{L}^T J_N T_G \otimes K_2^T)\hat{\delta}(t-1)]) \\ &= -\frac{\gamma}{t} E \left[\hat{\delta}^T(t-1) (T_G^{-1} (\mathcal{L} + \mathcal{L}^T) T_G \otimes I_n) \hat{\delta}(t-1) \right] \\ &= -\frac{2\gamma}{t} E \left[\hat{\delta}^T(t-1) (T_G^{-1} \mathcal{L}_s T_G \otimes I_n) \hat{\delta}(t-1) \right]. \end{aligned}$$

进一步, 由 $T_G^{-1} \mathcal{L}_s T_G = \text{diag}\{0, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, 并采用与文献 [19] 中定理 1 相同的处理方法, 结合 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 可得 $V_1(t) \leq -2\gamma \lambda_2 V(t-1)/t$ 以及 $V_2(t) \leq \gamma \lambda_2 V(t-1)/t + \gamma \lambda_G R(t-1)/(\lambda_2 t) + O(1/t^2)$. 从而,

$$V(t) \leq \left(1 - \frac{\gamma \lambda_2}{t} \right) V(t-1) + \frac{\gamma \lambda_G}{\lambda_2 t} R(t-1) + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

下面分析估计误差对应的函数 $R(t)$. 由估计误差的定义 $\varepsilon(t) = \hat{z}(t) - (Q \otimes K_2)x(t)$, 以及投影算子满足 $\|\Pi_M(z) - \xi\| \leq \|z - \xi\|$, 其中 $z \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in [-M, M]^d$, 可得

$$R(t) \leq R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

其中

$$\begin{aligned} R_1(t) &= E\left[\varepsilon^T(t-1) \left(I_d - \frac{\gamma}{t} QW\right)^T \left(I_d - \frac{\gamma}{t} QW\right) \varepsilon(t-1)\right], \\ R_2(t) &= \frac{2\gamma}{t} E\left[\varepsilon^T(t-1) (Q\mathcal{L} \otimes K_2)x(t-1)\right], \\ R_3(t) &= \frac{2\beta}{t} E\left[\varepsilon^T(t-1) \Delta(t) (\mathcal{F}_{\bar{C}}(\hat{z}(t-1)) - Q\tilde{s}(t))\right]. \end{aligned}$$

$R_1(t)$ 和 $R_2(t)$ 不直接涉及节点激活过程, 其处理方法与文献 [19] 中的同步情形一致. 通过展开相应二次型, 并结合 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 可得 $R_1(t) \leq (1 + 2\gamma\sqrt{\lambda_{QW}/t})R(t-1) + O(1/t^2)$ 以及 $R_2(t) \leq \frac{\gamma}{t} \left(\frac{\lambda_{Q\mathcal{L}\lambda_2}}{\lambda_g} R(t-1) + \frac{\lambda_g}{\lambda_2} V(t-1)\right)$.

下面重点分析异步广播机制对 $R_3(t)$ 的影响. 与同步情形不同, 节点 j 的激活状态不仅决定其一比特编码信息是否实际广播, 还决定相应估计器是否进行递推更新. 由 $\tilde{s}(t) = \text{diag}\{\mu(t)\}s(t)$ 和 $\Delta(t) = \text{diag}\{Q\mu(t)\}$ 可得 $Q\tilde{s}(t) = \Delta(t)Qs(t)$. 又由于 $\Delta^2(t) = \Delta(t)$, 有

$$\Delta(t) (\mathcal{F}_{\bar{C}}(\hat{z}(t-1)) - Q\tilde{s}(t)) = \Delta(t) (\mathcal{F}_{\bar{C}}(\hat{z}(t-1)) - Qs(t)).$$

因此,

$$R_3(t) = \frac{2\beta}{t} E\left[\varepsilon^T(t-1) \Delta(t) (\mathcal{F}_{\bar{C}}(\hat{z}(t-1)) - Qs(t))\right].$$

记 $p = [p_1, \dots, p_N]^T$, 其中 $p_j = P\{\mu_j(t) = 1\}$, 并定义 $P = \text{diag}\{Qp\}$. 记 $\mathcal{F}_t = \sigma\{d(\tau) : 1 \leq \tau \leq t\}$, 由于节点激活过程与历史信息及编码抖动相互独立, 有 $E[\Delta(t) | \mathcal{F}_{t-1}] = P$. 另一方面, 根据一比特编码机制及高斯随机抖动的分布性质, $E[Qs(t) | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathcal{F}_{\bar{C}}((Q \otimes K_2)x(t))$. 因此, 利用条件期望的性质可得

$$R_3(t) = \frac{2\beta}{t} E\left[\varepsilon^T(t-1) P (\mathcal{F}_{\bar{C}}(\hat{z}(t-1)) - \mathcal{F}_{\bar{C}}((Q \otimes K_2)x(t)))\right].$$

上述等式表明, 与同步情形相比, 异步节点激活过程通过概率矩阵 P 直接作用于估计误差的递推过程. 特别地, 与估计值 $\hat{z}_{ji}(t)$ 对应的更新项由被估计节点 j 的激活概率 p_j 加权.

由拉格朗日中值定理可知, 存在对角矩阵 $\Lambda_f(t) = \text{diag}\{f(\zeta_1(t)), \dots, f(\zeta_d(t))\}$, 其中 $\zeta_k(t)$ 位于对应的 $\bar{c}_k - \hat{z}_k(t-1)$ 与 $\bar{c}_k - [(Q \otimes K_2)x(t)]_k$ 之间, 使得

$$\mathcal{F}_{\bar{C}}(\hat{z}(t-1)) - \mathcal{F}_{\bar{C}}((Q \otimes K_2)x(t)) = -\Lambda_f(t) (\hat{z}(t-1) - (Q \otimes K_2)x(t)).$$

又由估计误差定义, $\hat{z}(t-1) - (Q \otimes K_2)x(t) = \varepsilon(t-1) + O(1/t)$. 因此,

$$R_3(t) = -\frac{2\beta}{t} E\left[\varepsilon^T(t-1) P \Lambda_f(t) \varepsilon(t-1)\right] + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

由估计值与压缩状态的有界性可知, 存在 $f_M = \min_{j \in \mathcal{V}}\{f(|c_j| + M)\} > 0$ 使得 $\Lambda_f(t) \succeq f_M I_d$. 记 $p_{\min} = \min_{j \in \mathcal{V}} p_j$. 由于 $P \succeq p_{\min} I_d$, 且 P 与 $\Lambda_f(t)$ 均为对角矩阵, 可得 $P \Lambda_f(t) \succeq p_{\min} f_M I_d$. 于是

$$R_3(t) \leq -\frac{2\beta p_{\min} f_M}{t} R(t-1) + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

综合 $R_1(t)$, $R_2(t)$ 和 $R_3(t)$ 的估计结果, 可得

$$R(t) \leq \left(1 - \frac{2\beta p_{\min} f_M - \gamma\alpha}{t}\right) R(t-1) + \frac{\gamma\lambda_g}{\lambda_2 t} V(t-1) + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

其中 $\alpha = \sqrt{2\lambda_Q W} + \frac{\lambda_Q c \lambda_2}{\lambda_G}$.

注 4.1 引理 4.1 表明, 异步节点激活机制首先直接作用于估计误差的递推关系. 由于节点 j 仅在被激活时才广播一比特信息, 与其相关的邻居状态估计值也只有在这些时刻才能利用新的通信数据进行递推更新. 因此, 节点激活概率 p_j 刻画了相应估计器获得有效通信并进行更新的平均频率. 在统一分析所有邻居状态估计误差时, 该影响体现为最小节点激活概率 $p_{\min} = \min_{j \in \mathcal{V}} p_j$. 当 $p_{\min}$ 较小时, 至少存在一个节点的有效广播频率较低, 从而削弱整体估计误差的衰减强度; 当 $p_{\min}$ 较大时, 估计器获得新一比特观测的机会增加, 有利于估计误差衰减.

另一方面, 压缩状态趋同误差的递推式中并不直接含有节点激活概率. 这是因为本文控制器基于当前缓存估计值构造趋同项, 而不是仅在邻居节点被激活时才使用该邻居信息. 然而, 趋同控制器依赖邻居状态估计结果, 因而估计误差会通过耦合递推关系进一步影响压缩状态的趋同过程. 由此可见, 异步节点激活概率主要通过影响状态估计过程, 间接影响系统的趋同性能. 当 $p_j = 1, j \in \mathcal{V}$ 时, 所有节点在每个时刻均广播信息, 本文结果退化为同步广播情形.

引理 4.1 建立了异步广播条件下压缩状态趋同误差与估计误差的耦合递推关系. 在此基础上, 下面进一步分析两类误差的收敛性质及其收敛速度.

定理 4.1 在假设 2.1-2.3 的条件下, 对于算法 3.1, 若 $\beta > \frac{\gamma}{2p_{\min} f_M} \left(\frac{\lambda_G^2}{\lambda_2^2} + \alpha \right)$, 则多智能体系统的压缩状态 $K_2 x_i(t)$ 实现均方趋同, 且其估计值 $\hat{z}_{ij}(t)$ 均方收敛于真实压缩状态. 即对任意 $i = 1, 2, \dots, N$ 和 $j \in \mathcal{N}_i$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|K_2 x_i(t) - K_2 \bar{x}(t)\|^2 = 0,$$

以及

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|\hat{z}_{ji}(t) - K_2 x_j(t)\|^2 = 0.$$

进一步, 若 $\gamma > \frac{1}{\lambda_2}$ 且 $\beta > \frac{1}{2p_{\min} f_M} \left[1 + \gamma\alpha + \frac{\gamma^2 \lambda_G^2}{\lambda_2^2 (\gamma \lambda_2 - 1)} \right]$, 则压缩状态趋同误差与估计误差均以 $O(1/t)$ 的速度收敛, 即

$$E \|K_2 x_i(t) - K_2 \bar{x}(t)\|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

以及

$$E \|\hat{z}_{ji}(t) - K_2 x_j(t)\|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

证 记 $Z(t) = \begin{bmatrix} V(t) \\ R(t) \end{bmatrix}$, 则由引理 4.1 可知, $V(t)$ 与 $R(t)$ 满足耦合递推关系, 故有

$$\|Z(t)\| \leq \left\| \left(I_2 - \frac{1}{t} U \right) Z(t-1) \right\| + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad (6)$$

其中 $U = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ -u_2 & u_4 \end{bmatrix}$, 且 $u_1 = \gamma \lambda_2$, $u_2 = \gamma \lambda_G / \lambda_2$, $u_4 = 2p_{\min} f_M \beta - \gamma \alpha$.

与同步广播情形相比, 异步节点激活的影响通过最小激活概率 $p_{\min}$ 进入矩阵 U 的对角元 u_4 , 进而影响耦合误差的收敛性质.

根据文献 [28, 定理 1], 递推式 (6) 的收敛性质由矩阵 U 的最小特征值决定. 当 $\lambda_{\min}(U) > 0$ 时, $\|Z(t)\| \rightarrow 0$; 当 $\lambda_{\min}(U) > 1$ 时, $\|Z(t)\| = O(1/t)$. 因此, 下面分析 $\lambda_{\min}(U)$ 的取值条件.

由于 U 为二阶对称矩阵, 当 $u_1 > 0$ 且 $u_1 u_4 - u_2^2 > 0$ 时, 有 $\lambda_{\min}(U) > 0$. 由 $u_1 = \gamma \lambda_2 > 0$ 以及 $u_1 u_4 - u_2^2 = \gamma \lambda_2 (2p_{\min} f_M \beta - \gamma \alpha) - \frac{\gamma^2 \lambda_G^2}{\lambda_2^2}$, 可知, 当

$$\beta > \frac{\gamma}{2p_{\min} f_M} \left(\frac{\lambda_G^2}{\lambda_2^3} + \alpha \right)$$

时, $\lambda_{\min}(U) > 0$. 结合递推式 (6) 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0.$$

根据 $V(t)$ 与 $R(t)$ 的定义, 压缩状态实现均方趋同, 且估计误差均方收敛于零, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|K_2 x_i(t) - K_2 \bar{x}(t)\|^2 = 0,$$

以及

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|\hat{z}_{ji}(t) - K_2 x_j(t)\|^2 = 0.$$

进一步, 为保证 $\lambda_{\min}(U) > 1$, 只需使矩阵 $U - I_2$ 正定. 由 $u_1 - 1 > 0$ 以及 $(u_1 - 1)(u_4 - 1) - u_2^2 > 0$, 可得

$$\gamma > \frac{1}{\lambda_2},$$

且

$$\beta > \frac{1}{2p_{\min} f_M} \left[1 + \gamma \alpha + \frac{\gamma^2 \lambda_G^2}{\lambda_2^2 (\gamma \lambda_2 - 1)} \right].$$

此时, $\lambda_{\min}(U) > 1$, 进而有

$$V(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad R(t) = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

再次根据 $V(t)$ 与 $R(t)$ 的定义可得

$$E \|K_2 x_i(t) - K_2 \bar{x}(t)\|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

以及

$$E \|\hat{z}_{ji}(t) - K_2 x_j(t)\|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

证毕.

4.2 系统状态趋同分析

本节进一步研究原始状态的趋同性. 定理 4.1 已经给出了压 Brunovsky 缩状态趋同误差与估计误差的收敛结果. 为进一步得到原始状态的趋同性及其趋同速度, 需要建立压缩状态与原始状态各分量之间的关系. 为此, 首先给出关于 Brunovsky 标准型系统的两个基本引理.

引理 4.2 ([19]) Brunovsky 标准型系统 (1)-(3) 满足

$$\mathbb{D}^{n-1} x_{in}(t) + b_{n-1} \mathbb{D}^{n-2} x_{in}(t) + \cdots + b_2 \mathbb{D} x_{in}(t) + b_1 x_{in}(t) = \mathbb{D}^{n-1} K_2 x_i(t),$$

其中 $x_i(t) = [x_{i1}(t), \cdots, x_{in}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \cdots, N$.

引理 4.3 ([19]) 设随机过程 $\xi(t) \in \mathbb{R}$ 满足随机差分方程

$$\mathbb{D}^{n-1} \xi(t) + b_{n-1} \mathbb{D}^{n-2} \xi(t) + \cdots + b_2 \mathbb{D} \xi(t) + b_1 \xi(t) = \eta(t),$$

其中, 随机过程 $\eta(t) \in \mathbb{R}$ 在均方意义下收敛于具有有限二阶矩的随机变量 η^* .

(i) 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} E|\eta(t) - \eta^*|^2 = 0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E|\xi(t) - \xi^*|^2 = 0;$$

(ii) 若 $E|\eta(t) - \eta^*|^2 = O(\frac{1}{t})$, 则

$$E|\xi(t) - \xi^*|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

其中 $\xi^* = \frac{\eta^*}{\prod_{j=1}^{n-1}(1-r_j)}$, $r_1, \dots, r_{n-1}$ 为多项式 $z^{n-1} + b_{n-1}z^{n-2} + \dots + b_2z + b_1 = 0$ 的根.

引理 4.2 给出了原始状态分量与压缩状态之间的差分关系, 引理 4.3 进一步表明, 在该差分关系条件下, 输出 $\eta(t)$ 的均方收敛性质及其收敛速度能够传递至输入 $\xi(t)$. 因此, 结合 Brunovsky 标准型, 压缩状态的趋同结果可保证原始状态的趋同性及其趋同速度. 具体如下.

定理 4.2 在假设 2.1-2.3 的条件下, 对于算法 3.1, 若 $\beta > \frac{\gamma}{2p_{\min}f_M} \left(\frac{\lambda_G^2}{\lambda_2^3} + \alpha \right)$, 则多智能体系统实现均方趋同, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|x_i(t) - \bar{x}(t)\|^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中 $\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$.

进一步, 若 $\gamma > \frac{1}{\lambda_2}$ 且 $\beta > \frac{1}{2p_{\min}f_M} \left[1 + \gamma\alpha + \frac{\gamma^2\lambda_G^2}{\lambda_2^2(\gamma\lambda_2 - 1)} \right]$, 则多智能体系统以 $O(1/t)$ 的速度实现均方趋同, 即

$$E\|x_i(t) - \bar{x}(t)\|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

证 由定理 4.1 可知, 在第一组步长系数条件下, 压缩状态 $K_2x_i(t)$ 实现均方趋同, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|K_2x_i(t) - K_2\bar{x}(t)\|^2 = 0.$$

进一步, 在第二组步长系数条件下, 有

$$E\|K_2x_i(t) - K_2\bar{x}(t)\|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

下面说明压缩状态的趋同性质能够保证原始状态的趋同性质. 根据引理 4.2-4.3 可知, 压缩状态 $K_2x_i(t)$ 的均方趋同及其收敛速度能够保证相应原始状态分量 $x_{in}(t)$ 具有相同的趋同性质. 又由于 Brunovsky 标准型满足: $\mathbb{D}x_{il}(t) = x_{i(l+1)}(t)$, $l = 1, \dots, n-1$, 因而可进一步由 $x_{in}(t)$ 的趋同性质得到整个原始状态向量 $x_i(t)$ 的趋同性及相应的趋同速度. 因此, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|x_i(t) - \bar{x}(t)\|^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

以及

$$E\|x_i(t) - \bar{x}(t)\|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

证毕.

注 4.2 定理 4.2 的参数条件反映了异步广播机制下估计过程与控制过程之间的相互制约关系. 估计步长系数 β 与最小节点激活概率 $p_{\min}$ 共同决定估计误差递推中的有效修正强度. 由于节点并非在每个时刻都广播一比特信息, 估计器能够获得新观测并进行有效更新的平均频率受到 $p_{\min}$ 的限制. 因此, 为保证估计误差具有足够的衰减强度, 需要 $\beta p_{\min}$ 足够大, 以抵消估计误差与趋同误差之间的耦合影响. 具体而言, 当 $p_{\min}$ 较小时, 部分节点的有效广播频率较低, 估计器获得新一比特通信的机会减少. 此时, 为保证均方趋同及 $O(1/t)$ 的状态趋同误差收敛速度, 需要选取较大的估计步长系数 β . 相反, 当 $p_{\min}$ 增大时, 估计器有效更新的机会增加, 较小的估

计步长系数即可满足相应的收敛条件. 需要指出的是, $p_{\min}$ 主要影响算法参数的可行取值范围和收敛过程中的常数项, 而不改变本文所得 $O(1/t)$ 的收敛阶.

5 数值仿真

本节以多飞机系统的高度趋同问题为例, 验证所提异步一比特趋同算法的有效性, 并进一步考察节点激活概率对系统收敛性能的影响. 考虑由 6 架飞机组成的多智能体系统, 单架飞机的结构示意图和智能体之间的通信拓扑分别如图 1 和图 2 所示.

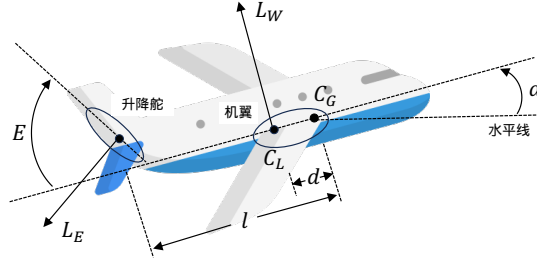


图 1 飞机结构示意图

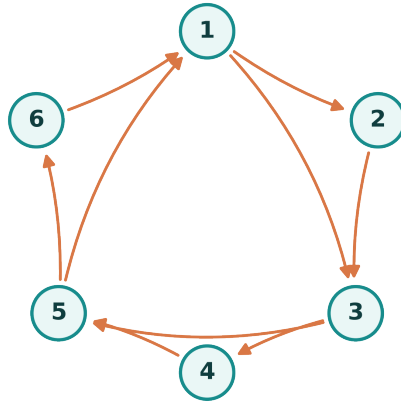


图 2 多飞机系统的通信拓扑图

根据图 1 所示的飞机结构, 单架飞机的线性化动力学模型为

$$\begin{cases} J\ddot{\alpha}_i = -(C_{ZW} - C_{ZE})\alpha_i - b\dot{\alpha}_i + lC_{ZE}E_i, \\ m\ddot{h}_i = (C_{ZW} + C_{ZE})\alpha_i + C_{ZE}E_i, \end{cases}$$

其中 α_i 和 h_i 分别为第 i 架飞机绕质心的转角和飞行高度, E_i 为升降舵转角, J 为转动惯量, m 为飞机质量, b 为阻尼系数, l 为升降舵到质心的距离, C_{ZE} 和 C_{ZW} 分别为升降舵和机翼产生的气动力系数. 飞机参数设置为 $J = 1, m = 1, b = 4, C_{ZE} = 1, C_{ZW} = 5, l = 3$. 取状态

$x_i = (\alpha_i, \dot{\alpha}_i, h_i, \dot{h}_i)^T$, 则相应的连续时间状态空间模型为

$$\dot{x}_i = A_c x_i + B_c E_i.$$

取采样周期 $T = 0.5$, 经零阶保持离散化后得到

$$x_i(t+1) = A_d x_i(t) + B_d E_i(t),$$

其中

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.7358 & 0.1839 & 0 & 0 \\ -0.7358 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7073 & 0.0777 & 1 & 0.5 \\ 2.6891 & 0.3964 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.1982 \\ 0.5518 \\ -0.0930 \\ -0.2668 \end{bmatrix}.$$

容易验证, (A_d, B_d) 能控, 因而可通过 Brunovsky 变换化为系统 (3) 的形式.

仿真中, 6 架飞机的初始高度分别取为

$$h_1(0) = 5, \quad h_2(0) = 2, \quad h_3(0) = 4, \quad h_4(0) = 3, \quad h_5(0) = 1.5, \quad h_6(0) = 1,$$

其余初始状态均取为零. 初始估计值均设为零. 取控制器增益和压缩系数分别为

$$K_1 = [-0.9224, -0.1825, 0, -0.1788],$$

$$K_2 = [3.8734, 0.9054, 0.3575, 0.8772],$$

并设置

$$c_{ij} = -2, \quad M = 2, \quad \gamma = 2, \quad \beta \text{ 根据仿真实验目的调整.}$$

为考察节点激活概率对趋同性能的影响, 分别考虑以下三组节点激活概率:

$$\mathcal{P}_1: \quad p_i = 1, \quad i = 1, \dots, 6,$$

$$\mathcal{P}_2: \quad p_i = 0.7, \quad i = 1, \dots, 6,$$

$$\mathcal{P}_3: \quad (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (0.7, 0.6, 0.5, 0.5, 0.4, 0.3).$$

其中, $\mathcal{P}_1$ 对应所有节点始终激活的同步通信情形, 作为同步通信基准; $\mathcal{P}_2$ 对应各节点具有相同激活概率的异步通信情形; $\mathcal{P}_3$ 则对应不同节点具有非一致激活概率的异步通信情形.

在给定相同的步长系数 β 下, 三组激活概率对应的系统状态趋同误差和压缩状态估计误差如图 3 所示. 可以看出, 与同步广播情形 $\mathcal{P}_1$ 相比, 异步广播情形下误差衰减过程相对变慢; 同时, 当最小节点激活概率进一步降低时, 系统状态趋同误差和压缩状态估计误差的衰减过程均受到更明显影响. 这说明节点激活概率会影响一比特信息的有效到达频率, 进而影响邻居压缩状态估计过程, 并通过估计误差与趋同误差之间的耦合关系影响闭环系统的收敛性能. 该现象与前文关于节点激活概率作用机制的理论分析一致.

下面进一步考察非一致激活概率情形 $\mathcal{P}_3$. 为直观展示异步广播过程, 图 4 给出了节点 1、3 和 6 的激活序列, 其激活概率分别为 $p_1 = 0.7, p_3 = 0.5, p_6 = 0.3$. 可以看出, 不同节点的广播时刻并不一致, 且激活概率越小, 相应节点在给定时间区间内的广播次数总体越少. 因此, 图 4 直观反映了本文所考虑的异步通信特征.

在上述非一致激活概率下, 取 $\beta = 500$, 6 架飞机的高度轨迹如图 5 所示. 由图可见, 尽管不同节点的一比特信息随机间歇到达, 各飞机高度仍逐渐趋于一致, 说明所提异步一比特趋同算法能够在非一致节点激活概率条件下实现多飞机系统的高度趋同.

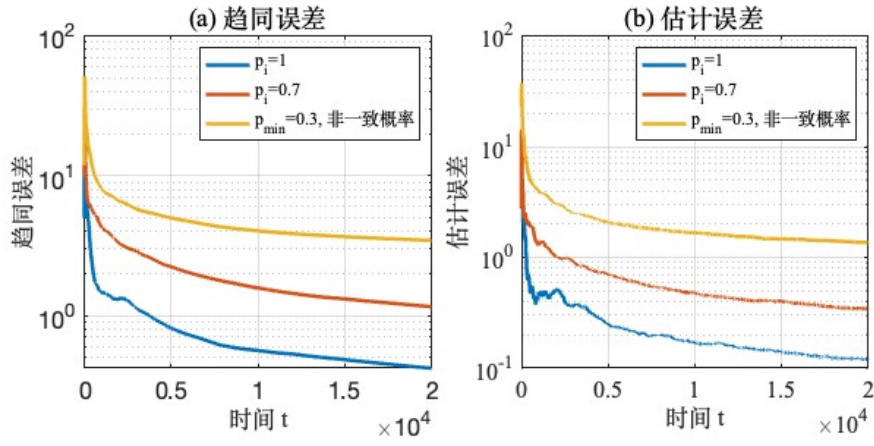


图 3 不同节点激活概率下的系统状态趋同误差与压缩状态估计误差

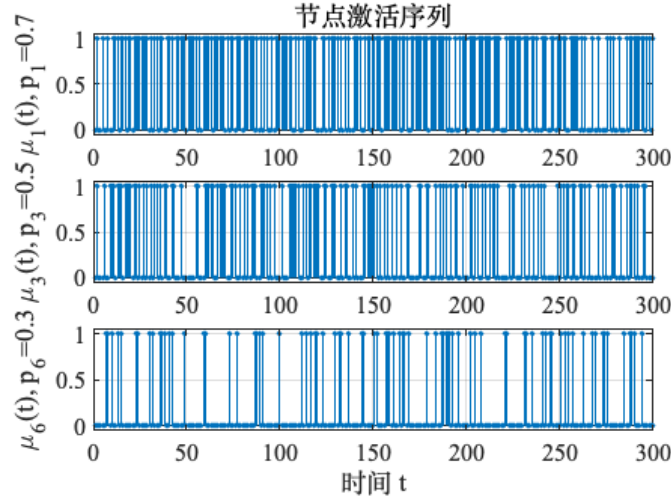


图 4 非一致激活概率下的节点激活序列

最后, 为验证误差收敛速度, 图 6 给出了非一致激活概率情形 $\mathcal{P}_3$ 下系统状态趋同误差和压缩状态估计误差的双对数结果, 并绘制斜率为 -1 的参考直线. 可以看出, 两类误差的整体衰减趋势与斜率 -1 的参考线一致, 表明系统的状态趋同误差和压缩状态的估计误差均达到 $O(1/t)$ 的收敛速度, 从而验证了定理 4.1 和 4.2 中关于压缩状态估计误差与系统状态趋同误差的理论结果.

6 总结

本文研究了异步广播网络下能控线性多智能体系统的一比特趋同控制问题, 提出了一种基于递推投影估计的异步一比特趋同算法. 通过引入随机节点激活变量刻画不同节点广播时刻的不一致性, 并结合异步到达的一比特信息设计递推投影估计器与趋同控制器, 构建了适用于异步广播机制的估计-控制框架, 实现了邻居压缩状态在线估计与趋同控制的协同设计. 理论分析建立了压缩状态趋同误差与估计误差之间的耦合递推关系, 刻画了节点激活概率对算法步长系数

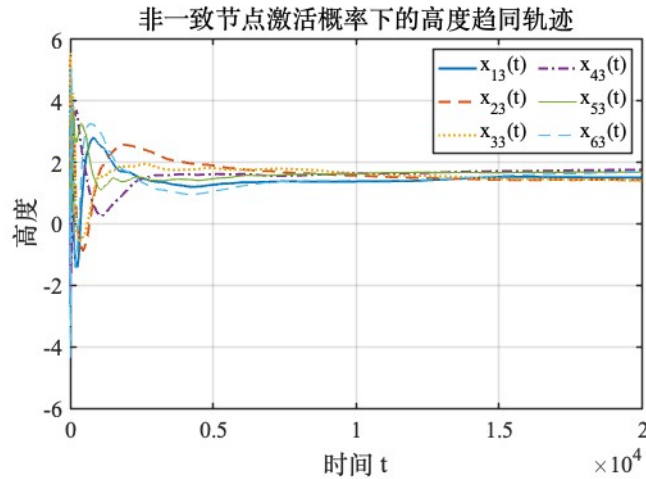


图 5 非一致激活概率下的飞机高度轨迹

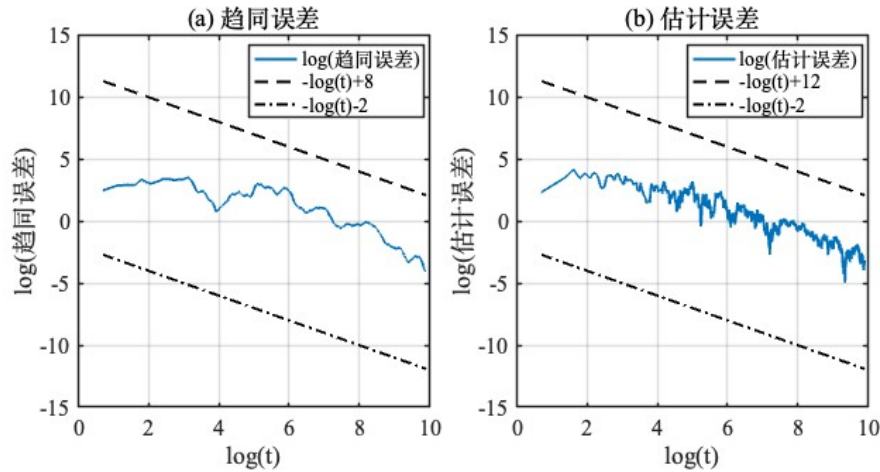


图 6 非一致激活概率下的系统状态趋同误差和压缩状态估计误差的收敛速度

选择条件及系统趋同性能的影响. 在此基础上, 证明了当通信拓扑为弱连通的平衡有向图时, 所提算法能够实现系统均方趋同, 且系统状态趋同速度达到 $O(1/t)$. 数值仿真验证了理论分析结果及所提算法的有效性.

本文采用相互独立的随机节点激活过程描述不同节点广播时刻的不一致性. 后续将进一步考虑具有时间相关性或节点间相关性的随机激活过程, 以及广播、接收与状态更新时刻相互解耦的异步网络机制, 研究更一般异步通信条件下的一比特趋同控制问题.

参 考 文 献

- [1] J. Zhang, S. Liu, and X. Zhang, "Observer-based distributed consensus for nonlinear multi-agent systems with limited data rate," *Science China Information Sciences*, vol. 65, no. 9, Article. no. 192204, 2022.
- [2] 林漫漫, 原志超, 王群亮, 杨辉, 宋令阳, 张爱华, 张纪峰, 朱永胜, "电子科技推动智能系统发展的贡献与挑战," *中原工学院学报*, vol. 37, no. 1, pp. 9–25, 2026.

- [3] 张冲, 伍益明, 徐明, 郑宁, “隐私保护下的多智能体系统弹性一致性控制,” *中国科学: 信息科学*, vol. 54, no. 4, pp. 927–943, 2024.
- [4] 徐辉, 崔国增, 李泽, “多四旋翼无人机分布式固定时间自适应编队控制,” *系统科学与数学*, vol. 42, no. 9, pp. 2245–2257, 2022.
- [5] 于晋伟, 朱琦, 米若涵, “基于神经网络的多机器人系统分布式事件触发编队跟踪控制,” *系统科学与数学*, doi: 10.12341/jssms240688, 2025.
- [6] A. Kashyap, T. Başar, and R. Srikant, “Quantized consensus,” *Automatica*, vol. 43, no. 7, pp. 1192–1203, 2007.
- [7] J. Zhao, Z. Ba, Y. Song, and Z. Li, “Asynchronously practical control for discrete time switched systems with singular perturbations via a quasi-time controller,” *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 39, no. 4, pp. 1574–1591, 2026.
- [8] R. Carli, F. Fagnani, A. Speranzon, and S. Zampieri, “Communication constraints in the average consensus problem,” *Automatica*, vol. 44, no. 3, pp. 671–684, 2008.
- [9] M. El Chamie, J. Liu, and T. Başar, “Design and analysis of distributed averaging with quantized communication,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 12, pp. 3870–3884, 2016.
- [10] T. Li and L. H. Xie, “Distributed coordination of multi-agent systems with quantized-observer based encoding-decoding,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 12, pp. 3023–3037, 2012.
- [11] Y. Meng, T. Li, and J. F. Zhang, “Finite-level quantized synchronization of discrete-time linear multiagent systems with switching topologies,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 55, no. 1, pp. 275–299, 2017.
- [12] X. Sun, Z. Ren, T. Wang, and G. Q. Tan, “The exponential consensus of linear multi-agent systems with binary-valued measurements and markovian switching topologies,” *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 39, no. 3, pp. 1011–1032, 2026.
- [13] Y. L. Zhao, T. Wang, and W. J. Bi, “Consensus protocol for multiagent systems with undirected topologies and binary-valued communications,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, no. 1, pp. 206–221, 2019.
- [14] T. Wang, H. Zhang, and Y. L. Zhao, “Consensus of multi-agent systems under binary-valued measurements and recursive projection algorithm,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 6, pp. 2678–2685, 2020.
- [15] T. Wang, M. Hu, and Y. L. Zhao, “Consensus of linear multi-agent systems with stochastic noises and binary-valued communications,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, no. 13, pp. 4863–4879, 2020.
- [16] R. An, Y. Wang, Y. Zhao, and J. F. Zhang, “Consensus of high-order multi-agent systems with binary-valued communications and switching topologies,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 12, no. 2, pp. 1369–1380, 2025.
- [17] H. F. Chen, *Stochastic Approximation and Its Applications*, Springer, New York, 2002.
- [18] K. W. Fu, H. F. Chen, and W. X. Zhao, “Distributed system identification for linear stochastic systems with binary sensors,” *Automatica*, vol. 141, Article. no. 110298, 2022.
- [19] R. An, Y. Wang, Y. Zhao, and J. F. Zhang, “One-bit consensus of controllable linear multi-agent systems with communication noises,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, doi: 10.1109/TAC.2026.3680847, 2026.
- [20] F. Xiao and T. Chen, “Sampled-data consensus in multi-agent systems with asynchronous hybrid event-time driven interactions,” *Systems & Control Letters*, vol. 89, pp. 24–34, 2016.
- [21] W. Liu and J. Huang, “Leader-following consensus for linear multiagent systems via asynchronous sampled-data control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 7, pp. 3215–3222, 2019.
- [22] X. Meng, L. Xie, and Y. C. Soh, “Asynchronous periodic event-triggered consensus for multi-agent systems,” *Automatica*, vol. 84, pp. 214–220, 2017.
- [23] T. C. Aysal, M. E. Yildiz, A. D. Sarwate, and A. Scaglione, “Broadcast gossip algorithms for consensus,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 7, pp. 2748–2761, 2009.

-
- [24] A. Nedic and A. Ozdaglar, “Distributed subgradient methods for multi-agent optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 1, pp. 48–61, 2009.
 - [25] N. Bastianello, R. Carli, L. Schenato, and M. Todescato, “Asynchronous distributed optimization over lossy networks via relaxed admm: Stability and linear convergence,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 6, pp. 2620–2635, 2020.
 - [26] S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, and D. Shah, “Randomized gossip algorithms,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 6, pp. 2508–2530, 2006.
 - [27] P. Brunovský, “A classification of linear controllable systems,” *Kybernetika*, vol. 6, no. 3, pp. 173–188, 1970.
 - [28] M. Hu, T. Wang, and Y. L. Zhao, “Consensus of switched multi-agent systems with binary-valued communications,” *Science China Information Sciences*, vol. 65, no. 6, Article. no. 162207, 2022.